

# 第一讲 绪论

## § 1.2 数学是什么



包头师范学院  
Baotou Teachers' College

# 一、数学的“定义”

恩格斯：数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门科学。

随着时间的推移，数学大大发展了，诸如事物的结构、数理逻辑等，都成为数学的研究对象；这些，似乎不能包含在上述定义中。人们在寻找数学的新“定义”。

但是，要给数学下个定义，并不那么容易。至今难以有有关于“数学”的、大家取得共识的“定义”。

# 一、数学的“定义”

## 1. 古今数学家的说法

(美) R·柯朗 (《数学是什么》)：“数学，作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念，深入细致的思考，以及完美和谐的愿望，它的基础是逻辑和直觉，分析和推理，共性和个性。”

# 一、数学的“定义”

## 1. 古今数学家的说法

(法) E·波莱尔：“数学是我们确切知道我们在说什么，并肯定我们说的  
是否对的唯一的一门科学。”

(英) 罗素：“数学是所有形如 $p$ 蕴含 $q$ 的命题的类”，而最前面的命题 $p$   
是否对，却无法判断。因此“数学是我们永远不知道我们在说什么，也  
不知道我们说的是否对的一门学科。”

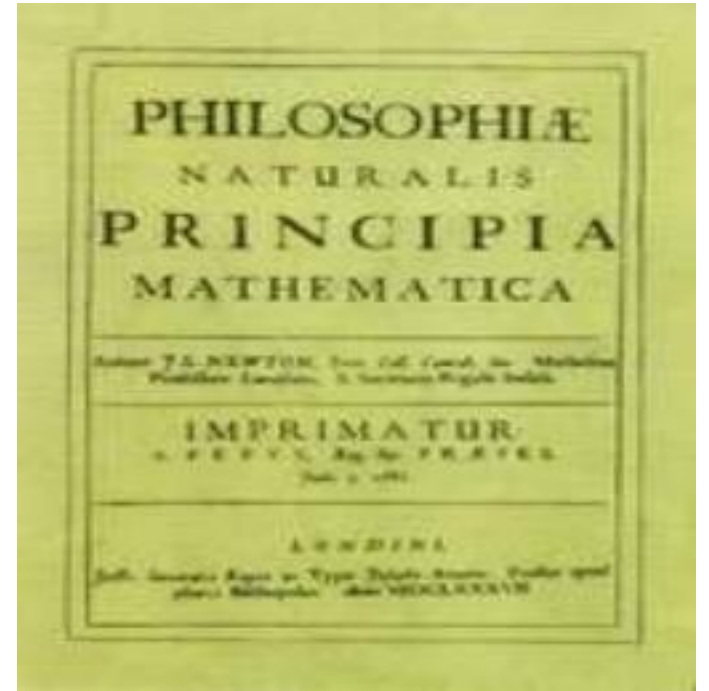
## 2. 数学的15个“定义”

- 1) 哲学说
- 2) 符号说
- 3) 科学说
- 4) 工具说
- 5) 逻辑说
- 6) 创新说
- 7) 直觉说
- 8) 集合说
- 9) 结构说 (关系说)
- 10) 模型说
- 11) 活动说
- 12) 精神说
- 13) 审美说
- 14) 艺术说
- 15) 万物皆数说

只讲解“哲学说”，其他只作一句话的解释，并请查资料。

## 哲学说

- 亚里士多德：“新的思想家把数学和哲学看作是相同的。”
- 来自古希腊，亚里士多德、欧几里得 等人。
- 《几何原本》：点是没有部分的那种东西；  
线是没有宽度的长度
- 牛顿在《自然哲学之数学原理》的序言中说，他是把这本书“作为哲学的数学原理的著作”，“在哲学范围内尽量把数学问题呈现出来”。



哲学是研究最广泛的事物，数学也是研究最广泛的事物，这是它们的共同点。

但是，数学与哲学的研究对象不同，研究方法也不同。两者虽有相似之处，但数学不是哲学的一部分，哲学也不是数学的一部分。

现在有人说“哲学从一门学科中退出，意味着这门学科的建立；而数学进入一门学科，就意味着这门学科的成熟。”

- **符号说**：是说数学是一种高级语言，是符号的世界。
- **科学说**：是说数学是精密的科学，“数学是科学的皇后”。
- **工具说**：是说“数学是其它所有知识工具的源泉”。
- **逻辑说**：是说数学推理依靠逻辑，“数学为其证明所具有的逻辑性而骄傲。”
- **创新说**：是说数学是一种创新，如发现无理数，提出微积分，创立非欧几何。

- **直觉说**：是说数学的基础是人的直觉，数学主要是由那些直觉能力强的人们推进的。
- **集合说**：是说数学各个分支的内容都可以用集合论的语言表述。
- **结构说（关系说）**：是强调数学语言、符号的结构方面及联系方面，“数学是一种关系学”。
- **模型说**：是说数学就是研究各种形式的模型，如微积分是物体运动的模型，概率论是偶然与必然现象的模型，欧氏几何是现实空间的模型，非欧几何是非欧空间的模型。

- **活动说**：是说“数学是人类最重要的活动之一”。
- **精神说**：是说“数学不仅是一种技巧，更是一种精神，特别是理性的精神。”
- **审美说**：是说“数学家无论是选择题材还是判断能否成功的标准，主要是美学的原则。”
- **艺术说**：是说“数学是一门艺术。”
- **万物皆数说**：是说数的规律是世界的根本规律，一切都可以归结为整数与整数比。

方延明：**数学**是研究现实世界中数与形之间各种形式模型的结构的一门科学。

徐利治：**数学**是“实在世界的最一般的量与空间形式的科学，同时又作为实在世界中最具有特殊性、实践性及多样性的量与空间形式的科学”。

回到恩格斯的定义：

**数学**是研究（现实世界中的）**数量关系与空间形式**的一门科学。

## 二、数学的特点

抽象性

精确性

应用的广泛性

# 二、数学的特点

## 1. 抽象性

第一，数学的研究对象本身就是抽象的；

第二，在数学的抽象中只保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切；

第三，数学的抽象是一级一级逐步提高的，它们所达到的抽象程度大大超过了其它学科中的抽象；

第四，核心数学主要处理抽象概念和它们的相互关系。

# 二、数学的特点

## 2. 精确性

数学的精确性表现在数学推理的逻辑严格性和数学结论的确定无疑性。

汉克尔说：“在大多数科学里，一代人要推倒另一代人所修筑的东西，只有数学，每一代人都能在旧建筑上增添一层新楼。”

作为对照的三个例子：

① 电子管电路 → 半导体电路 → 集成电路

② 地心说 → 日心说 → 开普勒三定律

③ 高温超导的上界（朱经武）  $30^{\circ}\text{K} \rightarrow 90^{\circ}\text{K} \rightarrow 120^{\circ}\text{K} \rightarrow 240^{\circ}\text{K}$

## 关于“晶体的结构有多少种”的讨论

- 曾经，许多物理学家、化学家、晶体学家给出了各不相同的结论。
- 数学家介入以后，运用“群”的理论，得到了明确的答案：晶体的结构只能有240种。
- 而且，数学家的推理是如此精确，让人信服，使得之后就不再有人去研究这一问题了，因为结论已经确定无疑。

## 二、数学的特点

### 3 . 应用的广泛性

华罗庚：宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在。

例子：①哈雷彗星的发现；

②海王星的发现；

③电磁波的发现。

# 哈雷彗星的发现

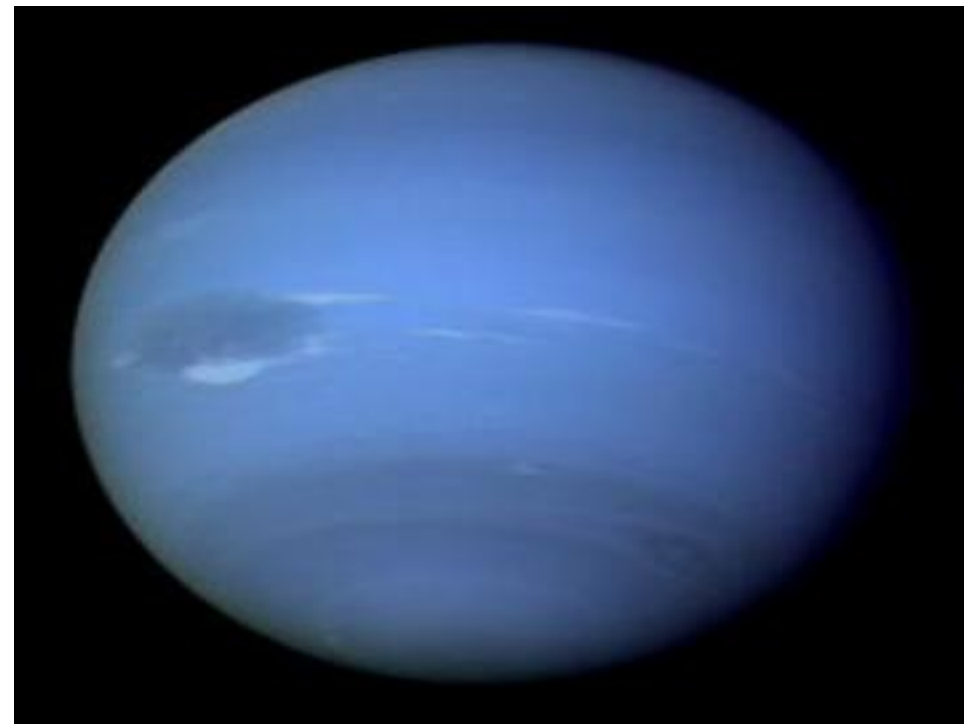
古时人们认为彗星的出现是不祥之兆，直到17世纪，英国天文学家哈雷开始计算彗星轨道时，发现1682年、1607年和1531年出现的彗星有相似的轨道，他判断这三颗彗星其实是同一颗彗星，并预言它将在1758年底或1759年初再次出现。1759年，这颗彗星果然出现了。虽然哈雷已在此前的1742年逝世，但为了纪念他，这颗彗星称为“哈雷彗星”。

哈雷彗星的回归周期为76年，最近一次的回归是在1986年；下一次回归是在2062年。



# 海王星的发现

这个太阳系最远的行星（之一），是1846年在数学计算的基础上发现的。天文学家分析了天王星运动的不规律性，推断出这是由其他行星的引力而产生的。勒未累计算出它应处的位置，观察员在指定位置发现了该行星。



# 电磁波地发现

英国物理学家麦克斯韦概括了由实验建立起来的电磁现象规律，把这些规律表述为“方程的形式”，用纯粹数学的方法推导出可能存在着电磁波并且这些电磁波应该以光速传播者。据此，他提出了光的电磁理论。此外，他的结论还推动了人们去寻找纯电起源的电磁波。

24年后，德国物理学家赫兹在振荡放电实验中证实了电磁波的存在，不久，意大利的马可尼和俄国人波波夫又在此基础上独立地发明了无线电报。从此，电磁波走进了千家万户。



# 三、数学与其它领域的联系

## 1. 数学与教育

数学对于受教育者，不仅仅是学会一门课程、一门知识、更重要的是学习数学的思想、方法、精神；把数学作为成才的基本素质要求。

## 1) 波利亚：“让我们教猜想吧！”

波利亚还说：“在数学家证明一个定理之前，必须猜想到这个定理；在他完成证明的细节之前，必须先猜想出证明的主导思想。”

事实上，教育并不总是在让学生认知，教育在很大程度上是让学生欣赏，只有这样，才有最佳的教育效益。

## 2) 作为数学教授的大学校长：

- 丁石孙——北京大学
- 苏步青——复旦大学
- 谷超豪——中国科大
- 潘承洞——山东大学
- 齐民友——武汉大学
- 伍卓群——吉林大学
- 侯自新——南开大学
- 李岳生——中山大学
- 曹策问——郑州大学
- 杨思明——湘潭大学
- 展 涛 ——山东大学
- 黄达人——中山大学
- 吴传喜——湖北大学
- 周明儒——徐州师大
- 王梓坤——北师大
- 陆善镇——北师大
- 王建磐——华东师大
- 史宁中——东北师大
- 路 钢——华中师大
- 邱玉辉——西南师大
- 王国俊——陕西师大
- 庾建设——广州大学
- 房灵敏——西藏大学

大学校长是综合素质比较好的学者；众多大学校长都是数学教授，这也说明数学教育对人的综合素质的提高，影响很大。

有些人把它叫做 有趣的中国现象

## 2.数学与文学

### 1) 用数学方法对作品和语言进行写作风格分析、词汇相关程度和句型频谱分析

#### 例：《红楼梦》前80回与后40回的作者是否相同？

1980年6月，在美国威斯康辛大学召开的国际首届《红楼梦》研讨会上，来自威斯康辛大学的华裔学者陈炳藻先生宣读了一篇《从词汇上的统计论〈红楼梦〉的作者问题》的博士论文，引起了国际红学界的关注和兴趣。1986年，陈炳藻教授公开发表了《电脑在文学上的应用：〈红楼梦〉与〈儿女英雄传〉两书作者》的专著。利用计算机对《红楼梦》前八十回和后四十回的用字进行了测定，并从数理统计的观点出发，探讨《红楼梦》前后用字的相关程度。他将《红楼梦》的一百二十回分为三组，每组四十回。并将《儿女英雄传》作为第四组进行比较，从每组中任意取出八万字，分别挑出名词，动词，形容词，副词，虚词这五种词汇，运用数理语言学，通过计算机程序对这些词进行编排，统计，比较和处理，进而找出各组相关程度。结果发现《红楼梦》前八十回与后四十回的词汇相关程度达到78.57%，而《红楼梦》与《儿女英雄传》的词汇相关程度是32.14%。由此他推断出《红楼梦》的作者为同一个人所写的结论。这个结论是否被红学界所接受，还存在一定的争论。但是这种方法却给很多人留下了深刻的印象。

**《静静的顿河》的作者是肖洛霍夫。**

## 2) 语言学好比一个公理化系统 (语法好比法则和定理)

## 3) 语音学 (关于语调) 的研究

计算机模拟人的语调，并绘出直观的三维图像，是南开大学中文系与计算机系合作的一个成果，曾获得国家级教学成果二等奖。其中大量用到数学。

### 3.数学与史学

#### 1) 史衡学

数学的介入，使史学的研究成果更加客观、严谨，较多地排除了人为因素。

#### 2) 考古对数学史研究的推进

1986年上海陆家咀发现元朝玉挂，谈祥柏教授研究后发现，它是一个四阶完全幻方。过去以为只有印度历史上才有这种“完全幻方”。

## 4.数学与哲学

- 1) 数学中“无限”的概念、“连续”的概念，一经出现，便成了哲学研究的对象。
- 2) “哲学从一门学科中退出，意味着这门学科的建立；而数学进入一门学科，就意味着这门学科的成熟。”

B.Demollins:“没有数学，我们无法看透哲学的深度，没有哲学，人们也无法看透数学的深度，而若没有两者，人们就什么也看不透。”

- 3) 哲学系的“逻辑学”专业与数学系的“数理逻辑”专业。

## 5.数学与经济

- 1) 普遍运用数学，建立经济模型
- 2) 获诺贝尔经济学奖的学者中，数学家出身的和有数学背景的人占一半以上。

## 6.数学与社会学

- 1) 定量社会学、实证社会学已经形成了一套逻辑严密的研究模式
- 2) “社会科学的许多重要领域已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段。”

## 7.数学与工程技术

- 1) “1991年的海湾战争就是信息战争、数学战争”
- 2) 数学与工程技术的相互渗透，非常广泛、深刻。

2000年 是联合国宣布的“世界数学年”，联合国教科文组织指出：“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙。”

[思]:

请你在学习“数学文化”课的过程中，始终带着下面的问题——在学完“数学文化”课后，给出一个你自己对“**数学**”的定义。